МГТУ имени Н.Э. Баумана
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы матричных операций

Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Вектора и матрицы

Матрицы и их свойства

Вектор: $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^{\mathrm{T}}$

Матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Квадратная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Верхняя и нижняя треугольная матрицы:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Обратная матрица: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Невырожденная (неособенная, обратимая) матрица — это матрица, для которой существует обратная матрица.

Критерии невырожденности:

1. строки и столбцы — линейно независимы;
2. ранг матрицы равен ее размерности;
3. определитель матрицы не равен нулю.

Транспонированная матрица: $\mathbf{A}_{ij}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_{ji}$

Симметричная матрица: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

Кососимметричная матрица: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$

Сопряженно-транспонированная матрица:

$$\mathbf{U}^{*} = \bar{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$$

Вектора и матрицы

Матрицы и их свойства

Эрмитова матрица: $\mathbf{A}^{*} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2+j \\ 2-j & 7 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 2-j \\ 2+j & 7 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 2+j \\ 2-j & 7 \end{bmatrix}$$

Унитарная матрица: $\mathbf{U}\mathbf{U}^{*} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{U} = \mathbf{I}$

Ортогональная матрица: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$$

Унитарная матрица содержит комплексные числа, а ортогональная — нет

Нормальная матрица: $\mathbf{U}\mathbf{U}^{*} = \mathbf{U}^{*}\mathbf{U}$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

Свойства нормальной матрицы:

1. диагонализируема через унитарные матрицы, т.е. представима в виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{UDV}$$

2. нормальная матрица с действительными собственными значениями — эрмитова матрица.

Разреженная матрица — это матрица, которая преимущественно состоит из нулевых значений (сколько точно — зависит от задачи)

Вектора и матрицы

Матрицы и их свойства

Минор — это определитель квадратной матрицы, составленной из элементов этой матрицы с номерами строк и столбцов от 1 до k включительно

Пример:

$$M = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = 104$$

Главный минор — это минор матрицы $\mathbf{A}$ для которого совпадает выбранные номера строк и столбцов

Угловой минор — это минор матрицы $\mathbf{A}$ состоящий из первых k столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Базисный минор — это ненулевой минор матрицы $\mathbf{A}$ максимального порядка

Ранг матрица — скалярное значение соответствующее порядке базисного минора

Линейная независимость — свойство системы векторов при котором уравнение

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0$$

имеет тривиальное решение только при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Дополнительный минор — это определитель матрицы $\mathbf{A}$, составленный из элементов матрицы $\mathbf{A}$ путем удаления i и j строк

Пример:

$$M_{23} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & \times \\ \times & \times & \times \\ 7 & 8 & \times \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 8 - 14 = -6$$

Алгебраическое дополнение — это скалярное значение определяемое следующим образом:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Присоединенная матрица:

$$\mathrm{adj}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Используется при вычислении обратной матрица:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}\mathbf{C}$$

Вектора и матрицы

Матричные операции

Матричная экспонента:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

Свойства матричной экспоненты:

1. $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
2. $e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} = \left(e^{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}}$
3. $e^{\mathbf{YXY}^{-1}} = \mathbf{Y}e^{\mathbf{X}}\mathbf{Y}^{-1}$

Квадратный корень из матрицы — это матрица, произведение которой на саму себя дает исходную, т.е.: $\mathbf{BB} = \mathbf{A}$

Методы получения:

1. через матричное разложение:
$$\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{V}^{-1}$$
2. метод Денмана—Биверса;
3. Вавилонский метод.

Метод Денмана—Биверса:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}$$
$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{Z}_{k-1}^{-1}$$
$$\mathbf{Y}_{k+1} = 0.5\left(\mathbf{Y}_k + \mathbf{Z}_k^{-1}\right)$$
$$\mathbf{Z}_{k+1} = 0.5\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{Y}_k^{-1}\right)$$
$$\mathbf{B}_{k+1} = 2\mathbf{B}_{k-1} - \mathbf{B}_k\mathbf{Z}_k\mathbf{B}_k$$

Вавилонский метод:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{B}_{k+1} = 0.5\left(\mathbf{B}_k + \mathbf{AB}_{k-1}^{-1}\right)$$

В Вавилонском методе обратная матрица вычисляется только один раз на каждом шаге, но устойчивость и сходимость хуже, чем у метода Денмана—Биверса

Вектора и матрицы

Собственные вектора и собственные значения

Собственный вектор $\mathbf{v}$ и соответствующее ему значение λ удовлетворяют следующему матричному уравнению

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

Сингулярные значения σ удовлетворяет следующему матричному уравнению, где вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ единичной длины

$$\mathbf{Av} = \sigma \mathbf{u}$$

Вычисление собственных значений:

Через решение матричного уравнения:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{v}$$

Аналитические решения есть только для небольших матриц, а численные подходы не универсальны

Через спектральное разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V \Lambda U}^*$$

Нет универсального численного метода. Можно использовать другие виды разложений

Вектора и матрицы

Определенность матриц

Положительно определенная матрица — это эрмитова матрица, которая удовлетворяет любому из следующих условий

Условия положительной определенности:

1. $\mathbf{z}^*\mathbf{A}\mathbf{z} > 0$
2. $\lambda_i(\mathbf{A}) > 0$
3. Определители всех угловых миноров положительны — Критерий Сильвестра

Существуют и другие критерии

Положительно полуопределенная — это эрмитова матрица, которая удовлетворяет тем же условиям, но со знаком «$\geq$»

Отрицательно определенная — это эрмитова матрица, которая удовлетворяет тем же условиям, но со знаком «$<$»

Отрицательно полуопределенная — это эрмитова матрица, которая удовлетворяет тем же условиям, но со знаком «$\leq$»

Обозначения:

1. Положительно определенная: $\mathbf{A} \succ 0$
2. Положительно полуопределенная: $\mathbf{A} \succcurlyeq 0$
3. Отрицательно определенная: $\mathbf{A} \prec 0$
4. Отрицательно полуопределенная: $\mathbf{A} \preccurlyeq 0$

Вектора и матрицы

Норма матрицы

Норма матрица — это скалярное значение, характеризующее меру объема матрицы (насколько большое в ней значения)

Операторная норма:

1. Максимальная сумма значений в столбцах:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

2. Максимальная сумма значений в строках:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

3. Спектральная норма:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right)}$$

Свойства норм:

1. $\|\mathbf{A}\| > 0,\ \textit{для}\ \mathbf{A} \ne \mathbf{0}$

2. $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| < \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

4. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$

Векторная p-норма:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \|\mathrm{vec}(\mathbf{A})\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}$$

Норма Шаттена:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\min(n,m)} \sigma_i^p(\mathbf{A})\right)^{1/p}$$

Индуцированная норма:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x}\ne 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

Норма $L_{p,q}$:

$$\|\mathbf{A}\|_{p,q} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/p}$$

Норма Фробениуса:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}$$